数理解析研究所講究録
1163 巻 2000 年 132-136

写像列と双曲3次元多様体

東京電機大学 理工学部　相 馬 輝 彦 (Teruhiko Soma)

以下，3 次元多様体はつねに向き付け可能かつ連結であると仮定する．この小論では，3 次元多様体間の写像度 $\deg(f)$ が零でない固有写像 $f: M \longrightarrow N$ について考える．このような $\deg(f) \neq 0$ の写像が存在するとき，N は M によって $|\deg(f)|$-**支配される**または簡単に**支配される**という．

特に我々が関心を持っているのは，これらの M, N が双曲多様体の場合である．

まずは Kirby の問題集 [7] にある Y. Rong の問題3.100を考える．

問題 1 (Y. Rong). 次の (i), (ii) において，M は任意の3次元閉多様体とする．

(i) M に1-支配される既約な3次元閉多様体 N は（位相同型を除いて）有限個か．

(ii) 次の性質をみたすような定数 $n(M) \in \mathbf{N}$ は存在するか．

$\deg(f_i) = 1$ である写像の列：

$$M \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$$

を考える．ただし，M_j $(j = 1, \ldots, n)$ は既約な3次元閉多様体とする．もしこの列の長さ n が $n(M)$ 以上であれば，f_i の中の少なくとも一つはホモトピー同値写像である．

問題1(i) に関連した結果としては，基本群が有限の Seifert 多様体で M に1-支配されるものは有限個であることが Hayat-Legrand, Wang および Zieschang [6] によって証明されている．また最近 Wang と Zhou [19] によって，基本群が無限の Seifert 多様体や Sol 多様体の場合にも同様の結果が成り立つことが証明された．これら以外の幾何的3次元多様体すなわち双曲多様体の場合には次が成り立つ．

定理 1 (Soma [13]). M を任意の3次元閉多様体とする．このとき，M によって支配される双曲多様体は有限個である．

定理 1の「支配」は1-支配に限定されていないことに注意せよ．以上の結果をまとめると，任意の3次元閉多様体が1-支配する幾何的3次元多様体は有限個であることが分かる．それでは，幾何的でない3次元多様体の場合はどうなるであろうか．Thurston の幾何化予

想 [18] では，幾何的でない既約な3次元閉多様体はすべてHaken多様体と考えられている．しかし，M によって1-支配されるHaken多様体が有限個かどうかは分かっていない．Thurstonの一意化定理 [18], [8] によると，Haken多様体 N は適当な有限個の非圧縮トーラスによっていくつかのSeifert多様体と双曲多様体の直和に分解される．この分割に現れる全ての双曲多様体の直和を $\mathcal{H}(N)$ で表し，これを N の**双曲部分**という．次の結果は，定理1の「双曲部分版」である．

定理 2 (Soma [14]). M を任意の3次元閉多様体とする．このとき，M によって支配されるHaken多様体 N の双曲部分 $\mathcal{H}(N)$ の位相型は高々有限個である．

問題1(i)が正しければ，(ii)の方も'ほとんど'正しい．正確には,「(i)の正解」+「予想：既約な3次元閉多様体の基本群はresidually finiteである」は「(ii)の正解」を含む．Rong [11] 自身は，$\deg(f_i) = 1$ 写像の無限列 $M_0 \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n \xrightarrow{f_n} \cdots$（ただし各 M_j は幾何的またはHaken閉多様体）は必ず一つはホモトピー同値写像を含むことを証明した．この結果と定理2を組み合わせると，有限列に関しても同様な結果が証明できる．それが次の定理の主張である．

定理 3 (Soma [13]). 任意の3次元閉多様体 M に対し，次の性質をみたすような定数 $n(M) \in \mathbf{N}$ が存在する．

$$M \xrightarrow{f_0} M_1 \xrightarrow{f_1} M_2 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_{n-1}} M_n$$

を $\deg(f_i) = 1$ 写像の有限列とする．ただし，M_j $(j = 1, \ldots, n)$ は幾何的3次元多様体またはHaken多様体とする．もしこの列の長さ n が $n(M)$ 以上であれば，f_i の中の少なくとも一つはホモトピー同値写像である．

もしThurstonの幾何化予想が正しければ，全ての既約な3次元閉多様体は幾何的であるかまたはHakenであるので，定理3が問題1(ii)の完全な解答を与えることになる．

$f : M \longrightarrow N$ を3次元多様体間の固有写像とする．もし $\deg(f) = 1$ ならば，$f_* : \pi_1(M) \longrightarrow \pi_1(N)$ は全射である．そこで，今度は $\deg(f) = 1$ より弱い条件「f は π_1-全射」をみたす写像の列を考える．

Kirbyの問題集 [7] にあるJ. Simonの問題1.12(C)は，3次元球面 S^3 内の結び目 $K_1, K_2, \ldots$ に対し，補集合間の π_1-全射写像 $f_i : S^3 - K_i \longrightarrow S^3 - K_{i+1}$ の列を考えていると見なせる．

問題 2 (J. Simon). K を S^3内の結び目とし，$\pi_1(S^3 - K) = G_0$ とおく．このとき，次の性質をみたすような定数 $n(K) \in \mathbf{N}$ が存在するか．

$$G_0 \xrightarrow{\varphi_0} G_1 \xrightarrow{\varphi_1} G_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} G_n$$

を各 φ_i が全射準同型写像であるような有限列とする．ただし，G_j $(j=1,\ldots,n)$ は S^3 内の結び目 K_j の群である; $G_j=\pi_1(S^3-K_j)$．もしこの列の長さ n が $n(K)$ 以上であれば，φ_i の中の少なくとも一つは同型写像である．

もちろん，S^3-K_i は1つのエンドを持つ開多様体である．この問題の閉多様体版も考えられるが，それには既に反例がある．実際，Reid, Wang と Zhou [10] は次の性質(*)をみたすような双曲3次元閉多様体 M を構成した．

(*) 任意の $n\in\mathbf{N}$ に対して，M から始まるホモトピー同値でない π_1-全射写像の列で長さ n のもの $M\xrightarrow{f_0}M_1\xrightarrow{f_1}M_2\xrightarrow{f_2}\cdots\xrightarrow{f_{n-1}}M_n$（各 M_j は双曲閉多様体）が存在する．

彼らは，M がSeifert閉多様体のときも，(*)に対応するような反例（ただし各 M_j はSeifert閉多様体）を構成している．これらの例とは対照的に，無限列の場合は次の定理が成り立つ．

定理 4 (Soma [16]).

$$G_0\xrightarrow{\varphi_0}G_1\xrightarrow{\varphi_1}G_2\xrightarrow{\varphi_2}\cdots\xrightarrow{\varphi_{n-1}}G_n\xrightarrow{\varphi_n}\cdots$$

を全射準同型写像の無限列とする．ただし，各 G_i は双曲3次元多様体（体積無限でもよい）の基本群である．もし G_0 が有限生成群であれば，有限個の $n\in\mathbf{N}$ を除いて他のすべての φ_n は同型写像である．

S^3 内の結び目 K の場合に戻る．結び目群 $G=\pi_1(S^3-K)$ の character variety (Culler-Shalen [3]) を $X(G)$ とおく．$X(G)$ は アフィン代数的集合である．常にというわけではないが，$\dim X(G)=1$ となる場合がしばしばある．例えば，K の外部 $E(K)$ が本質的閉曲面を含まないときはいつでも $\dim X(G)=1$ である（Cooper et al. [2, §2.4] 参照）．補集合 S^3-K が有限体積の双曲構造を持つとき，K を**双曲結び目**という．

定理 5 (Soma [16]). K を $\dim X(G_0)=1$ をみたす S^3内の双曲結び目とする．ただし，$\pi_1(S^3-K)=G_0$．$X(G)$ の既約成分の個数を $n(K_0)$ とおく．このとき，全射準同型写像の列：

$$G_0\xrightarrow{\varphi_0}G_1\xrightarrow{\varphi_1}G_2\xrightarrow{\varphi_2}\cdots\xrightarrow{\varphi_{n-1}}G_n$$

（各 G_j は双曲結び目群）の長さ n が $n(K_0)$ 以上であれば，φ_i の中の少なくとも一つは同型写像である．

Gromov-Thurston の剛性定理 [17, Chapter 6] によると，双曲3次元閉多様体の間の $\deg(f)=1$ 写像 $f:M\longrightarrow N$ が存在するとき，$\mathrm{Vol}(M)\geq\mathrm{Vol}(N)$ が成り立つ．さら

に，等号 $\mathrm{Vol}(M)=\mathrm{Vol}(N)$ が成立するための必要十分条件は f が等長写像にホモトピックになることである．ここでは必ずしもこの等号成立を仮定せずに，類似の剛性定理を考える．定理 1 より，$\mathrm{Vol}(N)$ が $\mathrm{Vol}(M)$ に十分近ければ，N は M に等長的である．もちろんこの「近さ」は，定義域 M に依存する．そこで，写像の定義域を固定せずに問題を考えることにする．

定理 5 (Soma [15]). $f_n : M_n \longrightarrow N_n$ $(n \in \mathbf{N})$ を双曲 3 次元閉多様体間の $\deg(f_n)=1$ の写像の列とする．もし $\lim_{n\to\infty}\mathrm{Vol}(M_n)=\lim_{n\to\infty}\mathrm{Vol}(N_n)<\infty$ が成り立てば，有限個の $n\in\mathbf{N}$ を除いて，他のすべての f_n は等長写像にホモトピックである．

定理 5 の証明は，[17] における Gromov-Thurston の剛性定理の証明が基礎となっている．しかし，我々の証明ではいかなるエルゴード性も使っていないので，特別な場合として彼らの剛性定理の別証明を与えていることになる．定理 5 を使うと，これまでのような下降写像列ばかりではなく上昇写像列に関する結果も得られる．

系 6 (Soma [15]). 任意の正数 $V>0$ に対し，次の性質をみたすような定数 $n_0(V)\in\mathbf{N}$ が存在する．

$$M_0 \xleftarrow{f_1} M_1 \xleftarrow{f_2} M_2 \xleftarrow{f_3} \cdots \xleftarrow{f_n} M_n$$

をホモトピー同値でない $\deg(f_j)=1$ 写像 f_j からなる任意の有限上昇列とする．ただし，各 M_j $(j=0,1,\ldots,n)$ は双曲 3 次元閉多様体である．このとき $n\geq n_0(V)$ であれば，M_n の体積は V 以上である．

※ 直接引用しなかったものも含め関連する話題を扱っている文献を挙げておく．

参考文献

[1] M. Boileau and S. Wang, Non-zero degree maps and surface bundles over S^1, J. Differential Geom. **43** (1996) 789-806.

[2] D. Cooper, M. Culler, H. Gillet, D.D. Long and P.B. Shalen, Plane curves associated to character varieties of 3-manifolds, Invent. Math. **118** (1994) 47-84.

[3] M. Culler and P.B. Shalen, Varieties of group representations and splitting of 3-manifolds, Ann. of Math. **117** (1983) 109-146.

[4] C. Hayat-Legrand, S. Wang and H. Zieschang, Degree-one maps onto lens spaces, Pacific J. Math. **176** (1996) 19-32.

[5] C. Hayat-Legrand, S. Wang and H. Zieschang, Minimal Seifert manifolds, Math. Ann. **308** (1997) 673-700.

[6] C. Hayat-Legrand, S. Wang and H. Zieschang, Any 3-manifold 1-dominates at most finitely many Seifert manifolds with finite fundamental groups, Peking University Research Report No. 82, (1999) preprint.

[7] R. Kirby, Problems in low-dimensional topology, Geometric Topology (W.H. Kazez ed.) AMS/IP Studies in Advanced Mathematics vol. 2, Part 2, Amer. Math. Soc. and International Press, 1997, pp. 35-473.

[8] J. Morgan, On Thurston's uniformization theorem for three-dimensional manifolds, The Smith Conjecture, Academic Press, New York, 1984, pp. 37-25.

[9] A.W. Reid and S. Wang, Non-Haken 3-manifolds are not large with respect to mappings of non-zero degree, Comm. Anal. Geom. **7** (1999) 105-132.

[10] A.W. Reid, S. Wang and Q. Zhou, Generalized Hopfian property, minimal Haken manifold, and J. Simon's conjecture for 3-manifold groups, preprint, `arXiv:math.GT/0002003`.

[11] Y. Rong, Degree one maps between geometric 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. **322** (1992) 411-436.

[12] Y. Rong, Maps between Seifert fibered spaces of infinite π_1, Pacific J. Math. **160** (1993) 143-154.

[13] T. Soma, Non-zero degree maps to hyperbolic 3-manifolds, J. Differential Geom. **49** (1998) 517-546.

[14] T. Soma, Sequences of degree-one maps between geometric 3-manifolds, Math. Ann. **316** (2000) 733-742.

[15] T. Soma, Degree-one maps between hyperbolic 3-manifolds with the same volume limit, preprint.

[16] T. Soma, Epimorphism sequences of hyperbolic 3-manifold groups, preprint.

[17] W. Thurston, The geometry and topology of 3-manifolds, Lecture Notes, Princeton Univ., Princeton (1978), `http://www.msri.org/publications/gt3m/`.

[18] W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups, and hyperbolic geometry, Bull. Amer. Math. Soc. **6** (1982) 357-381.

[19] S. Wang and Q. Zhou, Any 3-manifold 1-dominates at most finitely many geometric 3-manifolds, preprint, `arXiv:math.GT/0001058`.